

เอกสารประกอบการเรียนการสอน รายวิชา คณิตศาสตร์ ค32101

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5



ลำดับ

ลำดับเลขคณิต

ลำดับเรขาคณิต

อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเรขาคณิต

โดย นางนิสากร อับดุลเลาะห์
ครู วิทยฐานะชำนาญการ

อิสลามวิทยาลัยแห่งประเทศไทย
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำชี้แจง.....	ก
บทบาทของครูผู้สอน.....	ข
บทบาทของนักเรียน.....	ค
แบบทดสอบก่อนเรียน เรื่อง ลำดับและอนุกรม.....	1
ลำดับและอนุกรม ชุดที่ 1 ลำดับ.....	7
สาระ/มาตรฐาน/ตัวชี้วัด.....	8
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	9
แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 1.....	10
ใบความรู้ชุดที่ 1.1 เรื่อง ความหมายของลำดับ.....	12
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1.....	13
ใบความรู้ชุดที่ 1.2 เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์.....	14
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.2.....	16
ใบความรู้ชุดที่ 1.3 เรื่อง การเขียนลำดับจำกัดและลำดับอนันต์.....	17
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.3.....	19
ใบความรู้ชุดที่ 1.4 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ.....	20
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.4.....	22
ใบความรู้ชุดที่ 1.5 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป(ผลต่างชั้นเดียว).....	23
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.5.....	24
ใบความรู้ชุดที่ 1.6 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป(ผลต่างสองชั้น).....	25
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1.6.....	27
แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 1.....	28

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
ลำดับและอนุกรม ชุดที่ 2 ลำดับเลขคณิต.....	30
สาระ/มาตรฐาน/ตัวชี้วัด.....	31
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	32
แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 2.....	33
ใบความรู้ชุดที่ 2.1 เรื่อง ความหมายของลำดับเลขคณิต.....	35
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.1.....	36
ใบความรู้ชุดที่ 2.2 เรื่อง การเขียนพจน์ของลำดับเลขคณิต.....	37
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.2.....	39
ใบความรู้ชุดที่ 2.3 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต.....	40
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.3.....	41
ใบความรู้ชุดที่ 2.4 เรื่อง การหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิต.....	44
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.4.....	46
ใบความรู้ชุดที่ 2.5 เรื่อง การหาจำนวนพจน์ของลำดับเลขคณิต.....	48
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.5.....	50
ใบความรู้ชุดที่ 2.6 เรื่อง การประยุกต์ใช้ลำดับเลขคณิต.....	52
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2.6.....	56
แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 2.....	59
ลำดับและอนุกรม ชุดที่ 3 ลำดับเรขาคณิต.....	61
สาระ/มาตรฐาน/ตัวชี้วัด.....	62
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	63
แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 3.....	64

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
ใบความรู้ชุดที่ 3.1 เรื่อง ความหมายของลำดับเรขาคณิต.....	66
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3.1.....	68
ใบความรู้ชุดที่ 3.2 เรื่อง การเขียนพจน์ของลำดับเรขาคณิต.....	69
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3.2.....	71
ใบความรู้ชุดที่ 3.3 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต.....	72
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3.3.....	73
ใบความรู้ชุดที่ 3.4 เรื่อง การหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเรขาคณิต.....	74
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3.4.....	75
ใบความรู้ชุดที่ 3.5 เรื่อง การหาจำนวนพจน์ของลำดับเรขาคณิต.....	77
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3.5.....	78
ใบความรู้ชุดที่ 3.6 เรื่อง การประยุกต์ใช้ลำดับเรขาคณิต.....	80
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3.6.....	86
แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 3.....	91
ลำดับและอนุกรม ชุดที่ 4 อนุกรมเลขคณิต.....	93
สาระ/มาตรฐาน/ตัวชี้วัด.....	94
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	95
แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 4.....	96
ใบความรู้ชุดที่ 4.1 เรื่อง ความหมายของอนุกรม.....	98
แบบฝึกทักษะชุดที่ 4.1.....	99
ใบความรู้ชุดที่ 4.2 เรื่อง ความหมายของอนุกรมเลขคณิต.....	100
แบบฝึกทักษะชุดที่ 4.2.....	101

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
ใบความรู้ชุดที่ 4.3 เรื่อง การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต.....	102
แบบฝึกทักษะชุดที่ 4.3.....	105
ใบความรู้ชุดที่ 4.4 เรื่อง การหาผลบวกทุกพจน์ของอนุกรมเลขคณิต.....	107
แบบฝึกทักษะชุดที่ 4.4.....	109
ใบความรู้ชุดที่ 4.5 เรื่อง การประยุกต์ใช้อ่อนุกรมเลขคณิต.....	112
แบบฝึกทักษะชุดที่ 4.5.....	116
แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 4.....	121
ลำดับและอนุกรม ชุดที่ 5 อนุกรมเรขาคณิต.....	123
สาระ/มาตรฐาน/ตัวชี้วัด.....	124
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	125
แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 5.....	126
ใบความรู้ชุดที่ 5.1 เรื่อง ความหมายของอนุกรมเรขาคณิต.....	128
แบบฝึกทักษะชุดที่ 5.1.....	129
ใบความรู้ชุดที่ 5.2 เรื่อง การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต.....	130
แบบฝึกทักษะชุดที่ 5.2.....	132
ใบความรู้ชุดที่ 5.3 เรื่อง การหาผลบวกทุกพจน์ของอนุกรมเรขาคณิต.....	134
แบบฝึกทักษะชุดที่ 5.3.....	136
ใบความรู้ชุดที่ 5.4 เรื่อง การประยุกต์ใช้อ่อนุกรมเรขาคณิต.....	139
แบบฝึกทักษะชุดที่ 5.4.....	141
แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 5.....	144
แบบทดสอบหลังเรียน เรื่อง ลำดับและอนุกรม.....	146

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บรรณานุกรม.....	152
ภาคผนวก.....	153
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1-1.6.....	154
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 2.1-2.6.....	162
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 3.1-3.6.....	176
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 4.1-4.5.....	190
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 5.1-5.4.....	204
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน เรื่อง ลำดับและอนุกรม.....	214
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 1 – ชุดที่ 5.....	215
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 1 – ชุดที่ 5.....	216

สาระ/มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

เอกสารประกอบการเรียนการสอนชุดที่ 1 ลำดับ

สาระ

- สาระที่ 4 พีชคณิต
 สาระที่ 6 ทักษะกระบวนการคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้

- มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน
 มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อ
 ความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และ
 เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัด

- ค 4.1 ม.4-6/4 เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด
 ค 6.1 ม.4-6/1 ใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา
 ค 6.1 ม.4-6/2 ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการ
 แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม
 ค 6.1 ม.4-6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม
 ค 6.1 ม.4-6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย
 และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน
 ค 6.1 ม.4-6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ
 กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ
 ค 6.1 ม.4-6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จุดประสงค์การเรียนรู้

เอกสารประกอบการเรียนการสอนชุดที่ 1 ลำดับ

1. ด้านความรู้ (K)

- 1.1 นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้
- 1.2 นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ได้
- 1.3 นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแบบแจกแจงได้
- 1.4 นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้

2. ด้านทักษะกระบวนการ (P)

- 2.1 นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา
- 2.2 นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล
- 2.3 นักเรียนมีความสามารถในการสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ

3. ด้านคุณลักษณะ (A)

- 3.1 มีระเบียบวินัย
- 3.2 มีความรับผิดชอบ
- 3.3 สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ
- 3.4 ตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

แบบทดสอบก่อนเรียน เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ชุดที่ 1 ลำดับ

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

- คำชี้แจง** 1) แบบทดสอบก่อนเรียนชุดที่ 1 ใช้ทดสอบความรู้ของนักเรียนก่อนเรียน เรื่อง ลำดับ จำนวน 10 ข้อ
- 2) ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย × ลงในกระดาษคำตอบ
- 3) ใช้เวลาในการทดสอบ 20 นาที

1. พังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับ

- ก. $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (6, 10)\}$
- ข. $f = \{(5, 1), (4, 3), (3, 5), (2, 9)\}$
- ค. $f = \{(1, -1), (2, 1), (3, -1), (4, 1), (5, -1)\}$
- ง. $f = \{(3, 1), (6, 2), (9, 3), (12, 4), (15, 5)\}$

2. พังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับ

- ก. $f = \{(x, y) | y = x - 1 \text{ เมื่อ } x \in I\}$
- ข. $f = \{(x, y) | y = x^2 + 3 \text{ เมื่อ } x \in N\}$
- ค. $f = \{(x, y) | y = -x^2 - 1 \text{ เมื่อ } x \in I^+\}$
- ง. $f = \{(x, y) | y = 2x \text{ เมื่อ } x = 1, 2, 3, \dots, 10\}$

3. ข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับ

- ก. 5, 7, 9, 11, 13, 15 เป็นลำดับอนันต์
- ข. -5, -3, -1, 1, 3, 5, ... เป็นลำดับจำกัด
- ค. $a_n = -2n + 1$ เป็นลำดับจำกัด
- ง. $a_n = \frac{1}{n^2}$ เมื่อ $n \in I^+$ เป็นลำดับอนันต์

4. ลำดับแรกๆของลำดับ $a_n = 3n - 2$ ตรงกับข้อใด

- ก. 1, 4, 7, 10
- ข. 1, 3, 5, 7
- ค. 1, 5, 8, 11
- ง. 1, 3, 7, 11

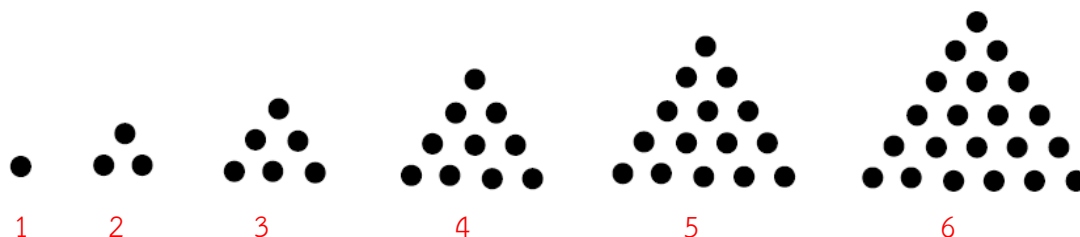
5. ลำดับแรกของลำดับ $a_n = \frac{n}{n(n+1)}$ ตรงกับข้อใด
- ก. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$
- ข. $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{3}{12}, \frac{4}{20}$
- ค. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$
- ง. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}$
6. พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับ 18, 13, 8, 3, ... ตรงกับข้อใด
- ก. -1, -5
- ข. -2, -6
- ค. -2, -7
- ง. -1, -7
7. พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับ 1, 6, 16, 31, ... ตรงกับข้อใด
- ก. 36, 46
- ข. 41, 56
- ค. 51, 66
- ง. 51, 76
8. พจน์ทั่วไปของลำดับ 1, 5, 9, 13, ... ตรงกับข้อใด
- ก. $a_n = 3n+4$
- ข. $a_n = 5n-4$
- ค. $a_n = 4n-3$
- ง. $a_n = 4n+3$
9. พจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 8, 16, 26, ... ตรงกับข้อใด
- ก. $a_n = n^2+3n-2$
- ข. $a_n = n^2-3n+2$
- ค. $a_n = 2n^2$
- ง. $a_n = 3n^2-3n+2$
10. พจน์ที่ 10 ของลำดับ 4, 7, 10, 13, 16, ... ตรงกับข้อใด
- ก. 34
- ข. 33
- ค. 32
- ง. 31

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง ความหมายของลำดับ

1. ลำดับ (Sequence)

1.1 ความหมายของลำดับ

พิจารณาความสัมพันธ์ของแบบรูปต่อไปนี้



ในแบบรูปข้างต้น พบว่า ลำดับที่ของรูปและจำนวนจุดในรูปมีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

รูปที่	1	2	3	4	5	6
จำนวนจุด	1	3	6	10	15	21

จากตารางจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ของลำดับของรูปและจำนวนจุดในแต่ละรูป เขียนเป็นฟังก์ชันได้ดังนี้ $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 6), (4, 10), (5, 15), (6, 21)\}$ ซึ่งมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{1, 3, 6, 10, 15, 21\}$

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกหรือสับเซตของจำนวนเต็มบวกในรูป $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ เรียกว่า ลำดับ

ตัวอย่างของลำดับ

ที่	ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	ลำดับ	
			เป็น	ไม่เป็น
1	$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	✓	
2	$f = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$		✓
3	$f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 12), (4, 17), (5, 22)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	✓	
4	$f = \{(5, 1), (7, 2), (9, 3), (11, 4)\}$	$\{5, 7, 9, 11\}$		✓
5	$f = \{(a, b) \mid b = 2a + 2, a \in \mathbb{I}^+\}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	✓	

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
แบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง ความหมายของลำดับ

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้

คำชี้แจง จงเติมคำว่า “เป็น” ในข้อที่เป็นลำดับ และเติมคำว่า “ไม่เป็น” ในข้อที่ไม่เป็นลำดับ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

ข้อ	ฟังก์ชัน	ลำดับ	เหตุผล
1	$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$		
2	$f = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)\}$		
3	$f = \{(1, 10), (-1, -15), (2, 25), (-2, -30)\}$		
4	$f = \{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3})\}$		
5	$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 8), (4, 16)\}$		
6	$f = \{(5, 3), (3, 12), (4, 27)\}$		
7	$f = \{(x, y) \mid y = 3x \text{ เมื่อ } x = 1, 2, 3, \dots, 10\}$		
8	$f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1 \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{I}^+\}$		
9	$f = \{(1, 1), (2, -1), (3, 1), (4, -1)\}$		
10	$f = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)\}$		

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ ใบความรู้ที่ 1.2 เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

1.2 ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

ในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า **ลำดับจำกัด (finite sequence)** และในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า **ลำดับอนันต์ (infinite sequence)**

ในการเขียนลำดับจะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไปกล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับจำกัด จะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ในกรณีที่ a เป็นลำดับอนันต์จะเขียนแทนด้วย

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

⋮

a_n ว่า พจน์ที่ n หรือ พจน์ทั่วไป (general term) ของลำดับ

มีพจน์สุดท้าย



นั่นคือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์

ไม่มีพจน์สุดท้าย

ตัวอย่าง จงเขียนลำดับจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ พร้อมทั้งบอกลำดับที่ได้เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์

1) $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

เขียนเป็นลำดับคือ 1, 3, 5, 7, 9 ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7$ และ $a_5 = 9$

มีจำนวน 5 พจน์ เป็นลำดับจำกัด

2) $f = \{(1, 10), (2, 20), (3, 30), (4, 40)\}$

เขียนเป็นลำดับคือ 10, 20, 30, 40 ที่มี $a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 30$ และ $a_4 = 40$

มีจำนวน 4 พจน์ เป็นลำดับจำกัด

3) $f = \{(a,b) \mid b = 2a+1 \text{ เมื่อ } a \in 1, 2, 3, \dots, 10\}$

เขียนเป็นลำดับคือ 3, 5, 7, ..., 21 ที่มี $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7$, และ $a_{10} = 21$

มีจำนวน 10 พจน์ เป็นลำดับจำกัด

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
 ในความรู้ที่ 1.2 เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

4) $f = \{(x,y) | y = \frac{x(x+1)}{2}, x \in \mathbb{N}\}$

เขียนเป็นลำดับคือ 1, 3, 6, 10, ... ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10$
 และมีจำนวนไปเรื่อย ๆ เป็นลำดับอนันต์

5) $f = \{(x,y) | y = 3x-2, x \in \mathbb{I}^+\}$

เขียนเป็นลำดับคือ 1, 4, 7, 10, ... ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10$
 และมีจำนวนไปเรื่อย ๆ เป็นลำดับอนันต์

หมายเหตุ ในกรณีที่กำหนดลำดับโดยพจน์ทั่วไป ถ้าไม่ได้ระบุสมาชิกในโดเมนให้ถือว่าลำดับนั้น
 เป็นลำดับอนันต์



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ แบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ได้

คำชี้แจง จงบอกว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

1) 4, 7, 10, 13, 16, ...

ตอบ

2) 2, 5, 8, 11, 14

ตอบ

3) 1, 4, 9, 16, 25, ...

ตอบ

4) 6, 10, 14, 18, 22, 26

ตอบ

5) -1, -3, -5, -7, ...

ตอบ

6) $a_n = 2n+5$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

ตอบ

7) $a_n = 4n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$

ตอบ

8) $a_n = n+7$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

ตอบ

9) $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 9$

ตอบ

10) $a_n = -4n-1$

ตอบ

น้องๆรู้ไหมครับ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ เรียกว่าลำดับ.....

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ เรียกว่าลำดับ.....



**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
ใบความรู้ที่ 1.3 เรื่อง การเขียนลำดับจำกัดและลำดับอนันต์**

1.3 การเขียนลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

การเขียนลำดับ เขียน ได้ 2 แบบ

1. แบบแจกแจงพจน์
2. แบบพจน์ทั่วไป

การเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์ จะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไป

เช่น 1, 3, 6, 10, 15 เป็นลำดับจำกัด และ -1, -3, -5, -7, -9, เป็นลำดับอนันต์

การเขียนลำดับแบบพจน์ทั่วไป จะต้องระบุสมาชิกในโดเมนด้วย ถ้าไม่ระบุสมาชิกในโดเมนให้ถือว่าลำดับนั้นเป็นลำดับอนันต์

เช่น $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เป็นลำดับจำกัด และ $a_n = -2n+1$ เป็นลำดับ

อนันต์

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $a_n = 5n-2$

วิธีทำ

จาก $a_n = 5n-2$

$$a_1 = 5(1)-2 = 3$$

$$a_2 = 5(2)-2 = 8$$

$$a_3 = 5(3)-2 = 13$$

$$a_4 = 5(4)-2 = 18$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 3, 8, 13, 18

แทนค่า n ด้วย 1, 2, 3 และ 4

2. $a_n = (-2)^n$

วิธีทำ

จาก $a_n = (-2)^n$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$a_4 = (-2)^4 = 16$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ -2, 4, -8, 16

แทนค่า n ด้วย 1, 2, 3 และ 4

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
ใบความรู้ที่ 1.3 เรื่อง การเขียนลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $a_n = 5 - 2n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ จงเขียนลำดับในรูปแฉงพจน์

วิธีทำ จาก $a_n = 5 - 2n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$$a_1 = 5 - 2(1) = 3$$

$$a_2 = 5 - 2(2) = 1$$

$$a_3 = 5 - 2(3) = -1$$

•
•
•

$$a_9 = 5 - 2(9) = -13$$

ดังนั้น ลำดับในรูปแฉงพจน์ คือ 3, 1, -1, ..., -13

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสองพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) 2, 6, 10, 14, ...

(2) 200, 195, 190, 185,

(3) 1, 3, 7, 13, ...

วิธีทำ (1) 2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22



เพิ่มทีละ 4

ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 18 และ 22

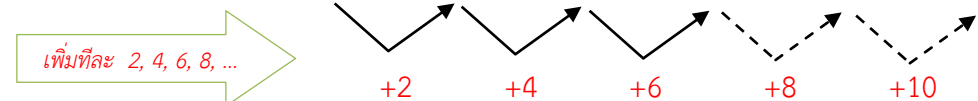
(2) 200 , 195 , 190 , 185 , 180 , 175



ลดทีละ 5

ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 180 และ 175

(3) 1 , 3 , 7 , 13 , 21 , 31



เพิ่มทีละ 2, 4, 6, 8, ...

ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 21 และ 31

**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
แบบฝึกทักษะที่ 1.3 เรื่อง การเขียนลำดับจำกัดและลำดับอนันต์**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแรงแพจน์ได้

คำชี้แจง 1) ให้นักเรียนเขียนลำดับในรูปแรงแพจน์ โดยการเติมคำตอบลงในช่องว่างในแต่ละข้อให้สมบูรณ์

<p>1.1)</p> $a_n = 2n+3$ $a_1 = \dots\dots\dots$ $a_2 = \dots\dots\dots$ $a_3 = \dots\dots\dots$ $a_4 = \dots\dots\dots$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ.....</p>	<p>1.2)</p> $a_n = -1+5n$ $a_1 = \dots\dots\dots$ $a_2 = \dots\dots\dots$ $a_3 = \dots\dots\dots$ $a_4 = \dots\dots\dots$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ.....</p>
<p>1.3)</p> $a_n = 3n^2 - 1$ $a_1 = \dots\dots\dots$ $a_2 = \dots\dots\dots$ $a_3 = \dots\dots\dots$ $a_4 = \dots\dots\dots$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ.....</p>	<p>1.4)</p> $a_n = \frac{4}{2^{n-1}}$ $a_1 = \dots\dots\dots$ $a_2 = \dots\dots\dots$ $a_3 = \dots\dots\dots$ $a_4 = \dots\dots\dots$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ.....</p>

2) ให้นักเรียนหาสองพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1) 1, 6, 11, 16,,

2.2) 1, 3, 7, 13,,

2.3) 100, 99, 97, 94,,

2.4) 5, 10, 30, 120,,

2.5) 1, 4, 16, 64,,

2.6) 729, 243, 81, 27,,

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ ใบความรู้ที่ 1.4 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

1.4 การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ การเขียนแสดงพจน์ทั่วไป a_n ในรูปที่มี n เป็นตัวแปร และเมื่อ n แทนด้วยสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วได้พจน์ที่ $1, 2, 3, \dots, m$ ของลำดับ ตรงตามที่กำหนด

วิธีการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้การสังเกตความสัมพันธ์ของพจน์ต่าง ๆ และความสัมพัทธ์ระหว่างพจน์กับลำดับที่ของพจน์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

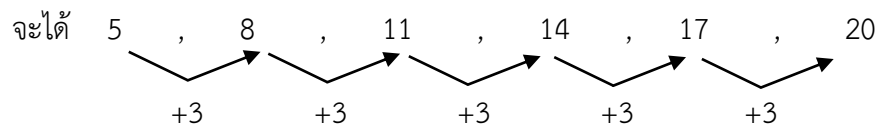
(1) 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

(2) 15, 11, 7, 3, ...

(3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

(4) 1, 3, 9, 27

วิธีทำ (1) จาก 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...



พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$a_1 = 5 = 3(1)+2$$

$$a_2 = 8 = 3(2)+2$$

$$a_3 = 11 = 3(3)+2$$

$$a_4 = 14 = 3(4)+2$$

$$a_5 = 17 = 3(5)+2$$

$$a_6 = 20 = 3(6)+2$$

สังเกตความสัมพันธ์นี้เพิ่มขึ้นทีละ 3
ทุกพจน์จะมี 3

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ $a_n = 3n+2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, ... เป็นค่า n

(2) จาก 15, 11, 7, 3, ...

สังเกตความสัมพันธ์นี้ลดลงทีละ 4

พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$a_1 = 15 = -4(1)+19$$

$$a_2 = 11 = -4(2)+19$$

$$a_3 = 7 = -4(3)+19$$

$$a_4 = 3 = -4(4)+19$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ $a_n = -4n+19$

1, 2, 3, 4, ... เป็นค่า n

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ ใบความรู้ที่ 1.4 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

(3) จาก $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

$$a_5 = \frac{5}{6} = \frac{5}{5+1}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(4) จาก 1, 3, 9, 27

พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$a_1 = 1 = 3^0 = 3^{1-1}$$

$$a_2 = 3 = 3^1 = 3^{2-1}$$

$$a_3 = 9 = 3^2 = 3^{3-1}$$

$$a_4 = 27 = 3^3 = 3^{4-1}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับนี้คือ $a_n = 3^{n-1}$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4\}$

พิจารณาตัวเลข แต่ละพจน์อยู่ในลักษณะเรียงกันเป็น
1, 2, 3, 4, 5 ดังนั้นพจน์ที่ n ของตัวเลขคือ n



พิจารณาตัวเลข แต่ละพจน์อยู่ในลักษณะเรียงกันเป็น
2, 3, 4, 5, 6 ดังนั้นพจน์ที่ n ของตัวเลขจะได้จาก
 $n+1$



ข้อสังเกต

- การหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดจำนวนพจน์น้อยเกินไป อาจทำให้เราหาพจน์ทั่วไปได้ต่างกัน เนื่องจากลำดับที่ต่างกันอาจมีพจน์แรก ๆ เหมือนกัน
- เมื่อหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้แล้ว ควรแทนค่า n ใน a_n ด้วยสมาชิก 1, 2, 3, ... เพื่อตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้จริงหรือไม่ โดยดูว่าพจน์ที่ได้จากการแทนค่าดังกล่าวเป็นไปตามที่กำหนดให้หรือไม่
- การกำหนดลำดับอนันต์จะเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้กับการเขียนลำดับเสมอเพื่อสื่อสารให้ทราบว่าจะกล่าวถึงลำดับใด เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ยกเว้นในกรณีที่ระบุได้ว่าลำดับอนันต์นั้นมีความสัมพันธ์ที่ชัดเจนว่าจะหาพจน์ถัดจากพจน์แรก ๆ ได้อย่างไร เช่น 1, 2, 3, 4, ...



**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
แบบฝึกทักษะที่ 1.4 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนลำดับที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพจน์ทั่วไป หรือพจน์ที่ n

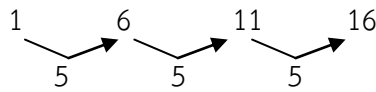
1) -3, 2, 7, 12, 17 $\therefore a_n = \dots\dots\dots$	2) 2, 5, 8, 11, 14, 17 $\therefore a_n = \dots\dots\dots$
3) 12, 19, 26, 33, ... $\therefore a_n = \dots\dots\dots$	4) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ $\therefore a_n = \dots\dots\dots$
5) 13, 11, 9, 7, ... $\therefore a_n = \dots\dots\dots$	6) -3, 0, 3, 6, ... $\therefore a_n = \dots\dots\dots$
7) 16, 8, 4, 2, ... $\therefore a_n = \dots\dots\dots$	8) 3, 5, 9, 17, ... $\therefore a_n = \dots\dots\dots$
9) 0.3, 0.03, 0.003, 0.0003, ... $\therefore a_n = \dots\dots\dots$	10) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$ $\therefore a_n = \dots\dots\dots$



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
ใบความรู้ที่ 1.5 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป (ผลต่างชั้นเดียว)

1.5 การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป

วิธีการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามที่มีลักษณะผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าเท่ากันตลอด นั่นคือ มีผลต่างชั้นเดียว เช่น 1, 6, 11, 16 จะเห็นได้ว่า ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าเท่ากับ 5 โดยตลอด (พจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกัน)

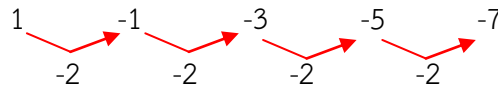


พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an+b$



ตัวอย่าง จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 1, -1, -3, -5, -7, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้พิจารณาผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าเท่ากับ -2



ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an+b$

แทน $n = 1$ เนื่องจาก $a_1 = 1$ จะได้ $1 = a+b$ (1)

$a_2 = -1$ จะได้ $-1 = 2a+b$ (2)

จาก (1) จะได้ $a = 1-b$

แทนค่า $a = 1-b$ ใน (2)

จะได้ $-1 = 2(1-b)+b$

$-1 = 2-2b+b$

$2b-b = 2+1$

$b = 3$

จาก $a = 1-b$

จะได้ $a = 1-3$

$a = -2$

ดังนั้น $a_n = -2n+3$

จาก $1 = a+b$
 $a+b = 1$
 ดังนั้น $a = 1-b$

แทนค่า $b = 3$

ตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

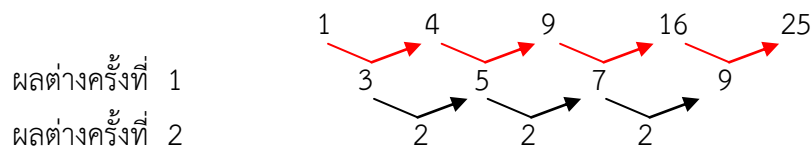
จาก $a_n = -2n+3$
 $a_1 = -2(1)+3 = 1$
 $a_2 = -2(2)+3 = -1$
 $a_3 = -2(3)+3 = -3$
 $a_4 = -2(4)+3 = -5$
 $a_5 = -2(5)+3 = -7$

จะเห็นว่า a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เท่ากับค่าที่กำหนดให้
 ดังนั้น $a_n = -2n+3$

เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
ใบความรู้ที่ 1.6 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป (ผลต่างสองชั้น)

1.6 การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป

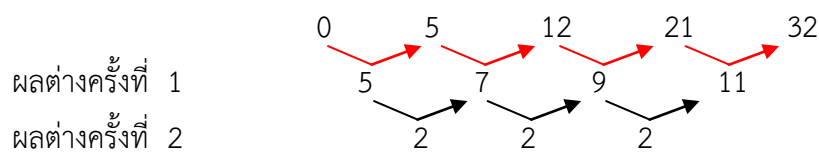
วิธีการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามที่มีลักษณะผลต่างครั้งแรกไม่เท่ากัน แต่ผลต่างครั้งที่ 2 เท่ากันตลอด นั่นคือ มีผลต่างสองชั้น เช่น 1, 4, 9, 16, 25 จะเห็นได้ว่าผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าไม่เท่ากัน แต่ถ้าหาผลต่างครั้งที่ 2 จะมีค่าเท่ากัน ดังภาพต่อไปนี้



พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 0, 5, 12, 21, 32, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้พิจารณาผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกัน



จะเห็นว่าผลต่างครั้งที่ 2 มีค่าเท่ากับ 2

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

แทน $n = 1$ จะได้ $a_1 = 0 = a + b + c$ (1)

แทน $n = 2$ จะได้ $a_2 = 5 = 4a + 2b + c$ (2)

แทน $n = 3$ จะได้ $a_3 = 12 = 9a + 3b + c$ (3)

แก้ระบบสมการเพื่อหา a , b และ c ดังนี้

(2) - (1) จะได้ $3a + b = 5$ (4)

(3) - (2) จะได้ $5a + b = 7$ (5)

(5) - (4) จะได้ $2a = 2$

$a = 1$

แทนค่า $a = 1$ ใน (4) จะได้ $3(1) + b = 5$

$b = 5 - 3$

$b = 2$



เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
 ในความรู้ที่ 1.6 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป (ผลต่างสองชั้น)

แทนค่า $a = 1$ และ $b = 2$ ใน (1) จะได้ $1+2+c = 0$

$$3+c = 0$$

$$c = -3$$

$$\text{ดังนั้น } a_n = n^2 + 2n - 3$$



ตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

$$\text{จาก } a_n = n^2 + 2n - 3$$

$$a_1 = 1^2 + 2(1) - 3 = 0$$

$$a_2 = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$$

$$a_3 = 3^2 + 2(3) - 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 2(4) - 3 = 21$$

$$a_5 = 5^2 + 2(5) - 3 = 32$$

จะเห็นว่า a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เท่ากับค่าที่กำหนดให้ ดังนั้น $a_n = n^2 + 2n - 3$

เอ้?... ถ้าผลต่างที่เท่ากันอยู่ในครั้งที่ 3 ละ เราจะหาพจน์ทั่วไปยังไงดี



เราจะอธิบายให้.....

วิธีการหาพจน์ทั่วไปโดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม เมื่อหาผลต่างระหว่างพจน์สองพจน์ของลำดับ และหาผลต่างของผลต่างจนได้ค่าคงตัวแล้วต้องนับว่าหาผลต่างครั้งที่เท่าใดจึงจะได้ค่าคงตัว ถ้าเป็นผลต่างครั้งที่ k พหุนามที่ใช้เป็นพจน์ทั่วไปจะเป็นพหุนามดีกรี k ดังนั้น ถ้าผลต่างที่เท่ากันอยู่ในครั้งที่ 3 จะได้พจน์ทั่วไป คือ $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ นั่นเอง



แบบทดสอบหลังเรียน เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ชุดที่ 1 ลำดับ

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

- คำชี้แจง** 1) แบบทดสอบหลังเรียนชุดที่ 1 ใช้ทดสอบความรู้ของนักเรียนหลังเรียน เรื่อง ลำดับ จำนวน 10 ข้อ
- 2) ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย × ลงในกระดาษคำตอบ
- 3) ใช้เวลาในการทดสอบ 20 นาที

1. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นลำดับ

- ก. $f = \{(x,y) | y = x-1 \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{I}\}$
- ข. $f = \{(x,y) | y = x^2 + 3 \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{N}\}$
- ค. $f = \{(x,y) | y = -x^2 - 1 \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{I}^+\}$
- ง. $f = \{(x,y) | y = 2x \text{ เมื่อ } x = 1, 2, 3, \dots, 10\}$

2. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับ

- ก. $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (6, 10)\}$
- ข. $f = \{(5, 1), (4, 3), (3, 5), (2, 9)\}$
- ค. $f = \{(1, -1), (2, 1), (3, -1), (4, 1), (5, -1)\}$
- ง. $f = \{(3, 1), (6, 2), (9, 3), (12, 4), (15, 5)\}$

3. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. 5, 7, 9, 11, 13, 15 เป็นลำดับอนันต์
- ข. -5, -3, -1, 1, 3, 5, ... เป็นลำดับจำกัด
- ค. $a_n = -2n+1$ เป็นลำดับจำกัด
- ง. $a_n = \frac{1}{n^2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ เป็นลำดับอนันต์

4. พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับ 18, 13, 8, 3, ... ตรงกับข้อใด

- ก. -1, -5
- ข. -2, -6
- ค. -2, -7
- ง. -1, -7

5. พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับ 1, 6, 16, 31, ... ตรงกับข้อใด

- ก. 36, 46
- ข. 41, 56
- ค. 51, 66
- ง. 51, 76

6. ลำดับแรกของลำดับ $a_n = \frac{n}{n(n+1)}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$

ข. $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{3}{12}, \frac{4}{20}$

ค. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$

ง. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}$

7. ลำดับแรกของลำดับ $a_n = 3n-2$ ตรงกับข้อใด

ก. 1, 4, 7, 10

ข. 1, 3, 5, 7

ค. 1, 5, 8, 11

ง. 1, 3, 7, 11

8. พจน์ทั่วไปของลำดับ 1, 5, 9, 13, ... ตรงกับข้อใด

ก. $a_n = 3n+4$

ข. $a_n = 5n-4$

ค. $a_n = 4n-3$

ง. $a_n = 4n+3$

9. พจน์ที่ 10 ของลำดับ 4, 7, 10, 13, 16, ... ตรงกับข้อใด

ก. 34

ข. 33

ค. 32

ง. 31

10. พจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 8, 16, 26, ... ตรงกับข้อใด

ก. $a_n = n^2+3n-2$

ข. $a_n = n^2-3n+2$

ค. $a_n = 2n^2$

ง. $a_n = 3n^2-3n+2$

**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง ความหมายของลำดับ**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้

คำชี้แจง จงเติมคำว่า “เป็น” ในข้อที่เป็นลำดับ และเติมคำว่า “ไม่เป็น” ในข้อที่ไม่เป็นลำดับ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

ข้อ	ฟังก์ชัน	ลำดับ	เหตุผล
1	$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$	เป็น	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
2	$f = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3), (9, 4)\}$	ไม่เป็น	โดเมนไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
3	$f = \{(1, 10), (-1, -15), (2, 25), (-2, -30)\}$	ไม่เป็น	โดเมนไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
4	$f = \{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3})\}$	เป็น	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
5	$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 8), (4, 16)\}$	เป็น	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
6	$f = \{(5, 3), (3, 12), (4, 27)\}$	ไม่เป็น	โดเมนไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
7	$f = \{(x, y) \mid y = 3x \text{ เมื่อ } x = 1, 2, 3, \dots, 10\}$	เป็น	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
8	$f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1 \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{I}^+\}$	เป็น	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
9	$f = \{(1, 1), (2, -1), (3, 1), (4, -1)\}$	เป็น	โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
10	$f = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)\}$	ไม่เป็น	โดเมนไม่เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับจำกัดและลำดับอนันต์ได้

คำชี้แจง จงบอกว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

1) 4, 7, 10, 13, 16, ...

ตอบ ลำดับอนันต์

2) 2, 5, 8, 11, 14

ตอบ ลำดับจำกัด

3) 1, 4, 9, 16, 25, ...

ตอบ ลำดับอนันต์

4) 6, 10, 14, 18, 22, 26

ตอบ ลำดับจำกัด

5) -1, -3, -5, -7, ...

ตอบ ลำดับอนันต์

6) $a_n = 2n+5$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

ตอบ ลำดับอนันต์

7) $a_n = 4n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$

ตอบ ลำดับจำกัด

8) $a_n = n+7$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

ตอบ ลำดับอนันต์

9) $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 9$

ตอบ ลำดับจำกัด

10) $a_n = -4n-1$

ตอบ ลำดับอนันต์

น้องๆรู้ไหมครับ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ เรียกว่าลำดับ....จำกัด.....

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ เรียกว่าลำดับ....อนันต์.....



**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3 เรื่อง การเขียนลำดับจำกัดและลำดับอนันต์**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแรงแพจน์ได้

คำชี้แจง 1) ให้นักเรียนเขียนลำดับในรูปแรงแพจน์ โดยการเติมคำตอบลงในช่องว่างในแต่ละข้อให้สมบูรณ์

<p>1.1)</p> $a_n = 2n+3$ $a_1 = 2(1)+3 = 5$ $a_2 = 2(2)+3 = 7$ $a_3 = 2(3)+3 = 9$ $a_4 = 2(4)+3 = 11$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ 5, 7, 9, 11</p>	<p>1.2)</p> $a_n = -1+5n$ $a_1 = -1+5(1) = 4$ $a_2 = -1+5(2) = 9$ $a_3 = -1+5(3) = 14$ $a_4 = -1+5(4) = 19$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ 4, 9, 14, 19</p>
<p>1.3)</p> $a_n = 3n^2 - 1$ $a_1 = 3(1)^2 - 1 = 2$ $a_2 = 3(2)^2 - 1 = 11$ $a_3 = 3(3)^2 - 1 = 26$ $a_4 = 3(4)^2 - 1 = 47$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ 2, 11, 26, 47</p>	<p>1.4)</p> $a_n = \frac{4}{2^{n-1}}$ $a_1 = \frac{4}{2^{1-1}} = 4$ $a_2 = \frac{4}{2^{2-1}} = 2$ $a_3 = \frac{4}{2^{3-1}} = 1$ $a_4 = \frac{4}{2^{4-1}} = \frac{1}{2}$ <p>เขียนในรูปแรงแพจน์ได้ลำดับคือ 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$</p>

2) นักเรียนหาสองพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1) 1, 6, 11, 16, 21, 26

2.2) 1, 3, 7, 13, 21, 31

2.3) 100, 99, 97, 94, 90, 85

2.4) 5, 10, 30, 120, 600, 3600

2.5) 1, 4, 16, 64, 256, 1024

2.6) 729, 243, 81, 27, 9, 3

**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4 เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนลำดับที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพจน์ทั่วไป หรือพจน์ที่ n

1) -3, 2, 7, 12, 17 $\therefore a_n = 5n-8$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	2) 2, 5, 8, 11, 14, 17 $\therefore a_n = 3n-1$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3) 12, 19, 26, 33, ... $\therefore a_n = 7n+5$	4) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ $\therefore a_n = \frac{1}{n^2}$
5) 13, 11, 9, 7, ... $\therefore a_n = -2n+15$	6) -3, 0, 3, 6, ... $\therefore a_n = 3n-6$
7) 16, 8, 4, 2, ... $\therefore a_n = 2^{5-n}$	8) 3, 5, 9, 17, ... $\therefore a_n = 2^n + 1$
9) 0.3, 0.03, 0.003, 0.0003 $\therefore a_n = \frac{3}{10^n}$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4\}$	10) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}$ $\therefore a_n = \frac{n}{2n+1}$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.5 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป (ผลต่างชั้นเดียว)**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม

1) $-1, -4, -7, -10, \dots$

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้พิจารณาผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าเท่ากับ -3

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป

$$a_n = an + b$$

แทน $n = 1$ เนื่องจาก $a_1 = -1$ จะได้ $-1 = a + b$ (1)

$a_2 = -4$ จะได้ $-4 = 2a + b$ (2)

จาก (1) จะได้ $a = -1 - b$

แทนค่า $a = -1 - b$ ใน (2)

จะได้ $-4 = 2(-1 - b) + b$

$$-4 = -2 - 2b + b$$

$$2b - b = -2 + 4$$

$$b = 2$$

จาก $a = -1 - b$ แทนค่า $b = 2$

จะได้ $a = -1 - 2$

$$a = -3$$

ดังนั้น $a_n = -3n + 2$

2) $5, 9, 13, 17, 21, \dots$

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้พิจารณาผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าเท่ากับ 4

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป

$$a_n = an + b$$

แทน $n = 1$ เนื่องจาก $a_1 = 5$ จะได้ $5 = a + b$ (1)

$a_2 = 9$ จะได้ $9 = 2a + b$ (2)

จาก (1) จะได้ $a = 5 - b$

แทนค่า $a = 5 - b$ ใน (2)

จะได้ $9 = 2(5 - b) + b$

$$9 = 10 - 2b + b$$

$$b = 1$$

จาก $a = 5 - b$ แทนค่า $b = 1$

จะได้ $a = 5 - 1$

$$a = 4$$

ดังนั้น $a_n = 4n + 1$

**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.6 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป (ผลต่างสองชั้น)**

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงการหาพจน์ทั่วไปของลำดับโดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม

1) 2, 9, 22, 41, 66, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้พิจารณาผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกัน จะเห็นว่าผลต่างครั้งที่ 2
มีค่าเท่ากับ 6

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

$$\text{แทน } n = 1 \text{ จะได้ } a_1 = 2 = a + b + c \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{แทน } n = 2 \text{ จะได้ } a_2 = 9 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{แทน } n = 3 \text{ จะได้ } a_3 = 22 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots\dots(3)$$

แก้ระบบสมการเพื่อหา a , b และ c ดังนี้

$$(2) - (1) \text{ จะได้ } 3a + b = 7 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) - (2) \text{ จะได้ } 5a + b = 13 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(5) - (4) \text{ จะได้ } 2a = 6$$

$$a = 3$$

$$\text{แทนค่า } a = 3 \text{ ใน (4) จะได้ } 3(3) + b = 7$$

$$b = 7 - 9$$

$$b = -2$$

$$\text{แทนค่า } a = 3 \text{ และ } b = -2 \text{ ใน (1) จะได้ } 3 - 2 + c = 2$$

$$1 + c = 2$$

$$c = 1$$

$$\text{ดังนั้น } a_n = 3n^2 - 2n + 1$$

2) 1, 4, 9, 16, 25, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้พิจารณาผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกัน จะเห็นว่าผลต่างครั้งที่ 2
มีค่าเท่ากับ 2

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับอยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

$$\text{แทน } n = 1 \text{ จะได้ } a_1 = 1 = a + b + c \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{แทน } n = 2 \text{ จะได้ } a_2 = 4 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{แทน } n = 3 \text{ จะได้ } a_3 = 9 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots\dots(3)$$

**เอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดที่ 1 เรื่อง ลำดับ
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.6 เรื่อง การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป (ผลต่างสองชั้น)**

แก้ระบบสมการเพื่อหา a , b และ c ดังนี้

$$(2) - (1) \quad \text{จะได้} \quad 3a + b = 3 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) - (2) \quad \text{จะได้} \quad 5a + b = 5 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(5) - (4) \quad \text{จะได้} \quad 2a = 2$$

$$a = 1$$

แทนค่า $a = 1$ ใน (4) จะได้ $3(1)+b = 3$

$$b = 3-3$$

$$b = 0$$

แทนค่า $a = 1$ และ $b = 0$ ใน (1) จะได้ $1+0+c = 1$

$$1+c = 1$$

$$c = 0$$

ดังนั้น $a_n = n^2$

ถ้าคุณไม่ลอง 'ก้าว' จะไม่มีวันรู้เลยว่า 'ข้างหน้า' เป็นอย่างไร

